Analyse 2 - Limites et continuité des fonctions

Définition (Voisinages)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$.*

- *Un voisinage de a est un intervalle du type $[a-\eta\,,\,a+\eta]$, où $\eta > 0$.*
- *Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle du type $[x_0\,,\,+\infty[$, où $x_0 \in \mathbb{R}$.*
- *Un voisinage de $-\infty$ est un intervalle du type $]-\infty\,,\,x_0]$, où $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Vocabulaire. *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $\mathcal{H}(t)$ une proposition dépendant d'un paramètre réel t. On dit que la proposition $\mathcal{H}$ est vraie* ***au voisinage de a*** *s'il* ***existe*** *un voisinage V de a tel que pour tout $t \in V$, $\mathcal{H}(t)$ est vraie.*

Exemple : la phrase "$f(t) \geqslant 0$ au voisinage de 2" (ou "$f \geqslant 0$ au voisinage de 2") signifie :

"il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [2-\eta, 2+\eta]$, $f(t) \geqslant 0$"

NB : dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

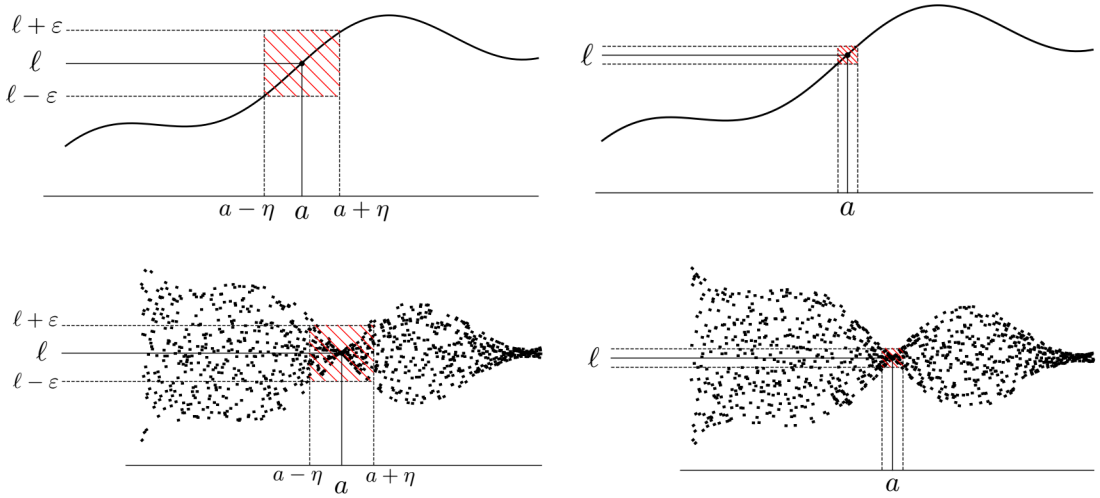
1 Limite d'une fonction

Dans cette partie, f désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

Définition (Limite finie/infinie de f en a)**.** *Soit a un réel appartenant à I ou une extrémité de I, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que :*

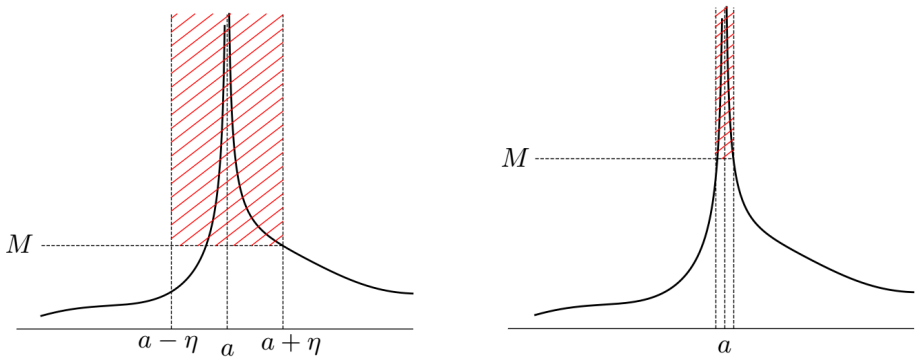
- *f admet ℓ comme limite au point a (notation : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a sur lequel $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$ (x devant toutefois appartenir à I). Autrement dit :*

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \ \exists \eta > 0 \ \text{ tel que } \ \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I\ ,\ \ |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$



- *f (fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ mais pas en a) admet $+\infty$ comme limite au point a (notation : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$) si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage de a (privé de a) sur lequel $f(x) \geqslant M$. Autrement dit :*

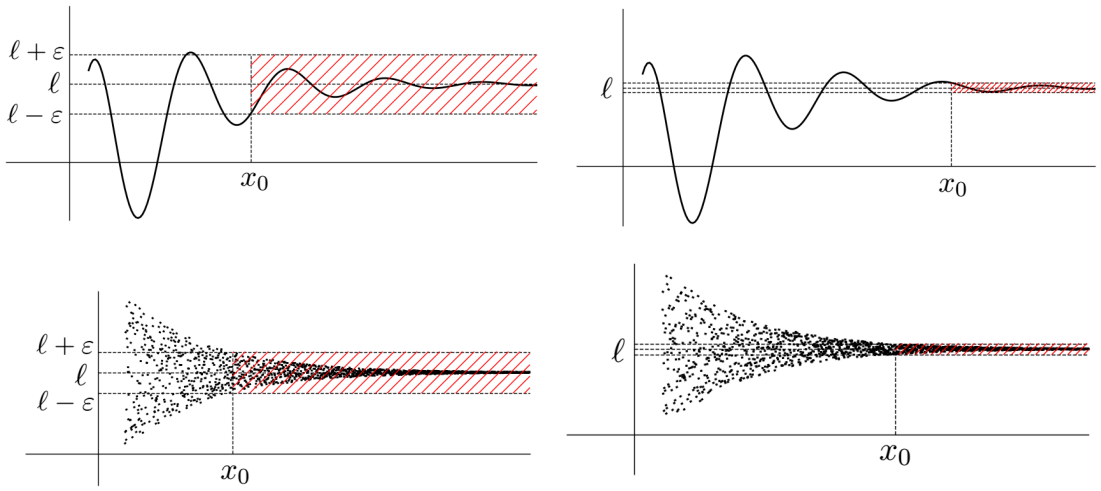
$$\forall M \in \mathbb{R}\ ,\ \ \exists \eta > 0 \ \text{ tel que } \ \forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap (I \setminus \{a\})\ ,\ \ f(x) \geqslant M$$



Définition (Limite finie/infinie de f en $+\infty$)**.** *On suppose que I admet $+\infty$ comme extrémité. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que :*

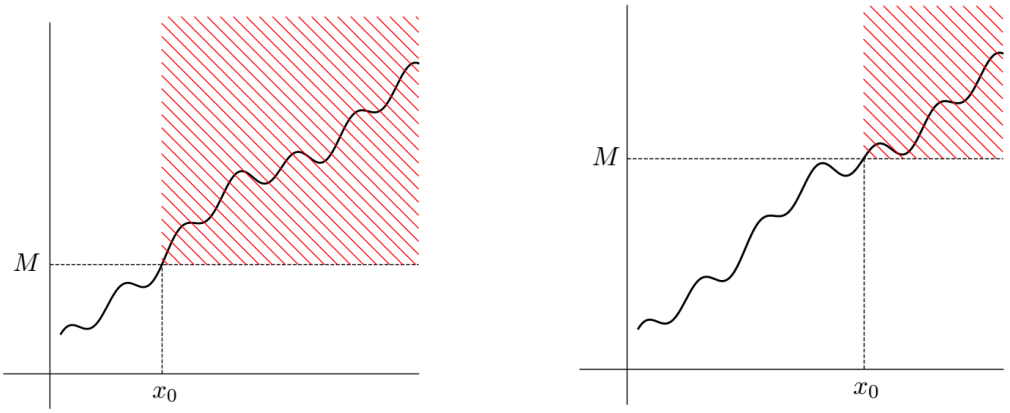
- *f admet ℓ comme limite en $+\infty$ (notation : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Autrement dit :*

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \ \exists x_0 \in I \ \text{ tel que } \forall x \geqslant x_0\ ,\ \ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$



- *f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ (notation : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $f(x) \geqslant M$. Autrement dit :*

$$\forall M \in \mathbb{R}\ ,\ \ \exists x_0 \in I \ \text{ tel que } \forall x \geqslant x_0\ ,\ \ f(x) \geqslant M$$



Notation. *On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'"ensemble" : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*
Il ne s'agit que d'une commodité de langage, pour pouvoir dire par exemple "f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a", ce qui signifie que cette limite ℓ peut être finie ou infinie.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction)**.**
Soit f définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a l'équivalence suivante :

$$\left(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell\right) \iff \left(\begin{array}{c} \text{Pour toute suite réelle } u \text{ telle que } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a, \\ \text{on a } f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array} \right)$$

(Démonstration page 8)

Exemple d'utilisation positive : limite lorsque $n \to +\infty$ de $\sin(\frac{1}{2n})$.
Exemple d'utilisation négative : (non)-limite de $\sin(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Propriétés (fonctions admettant une limite en a)**.** *Soit a un point de I ou une de ses extrémités (éventuellement $a = \pm\infty$)*

- *Une fonction f ne peut pas avoir 2 limites différentes en a (unicité de la limite). Cette limite, quand elle existe, est notée $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$.*
- *Si f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a, alors f est bornée sur un voisinage de a.*
- *Si deux fonctions f et g admettent chacune une limite en a, et vérifient $f(x) \leqslant g(x)$ sur un voisinage de a, alors $\lim\limits_{a} f \leqslant \lim\limits_{a} g$. Cette propriété est fausse avec les inégalités strictes.*
- *Si deux fonctions f et g admettent chacune une limite en a avec $\lim\limits_{a} f < \lim\limits_{a} g$, alors il existe un voisinage de a sur lequel on a $f(x) < g(x)$.*
- *Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_f \in \mathbb{R}$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_g \in \mathbb{R}$ alors*

  1. $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_f + \ell_g$
  2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda \ell_f$
  3. $f(x) \times g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_f \times \ell_g$
  4. $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |\ell_f|$
  5. *si* $\ell_f \neq 0$, $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell_f}$
  6. *(lorsque $a \notin I$) si* $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0^+$ *alors* $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$

- *(Composition/changement de variable) Soient f et h sont deux fonctions telles que leur composée $h \circ f$ est correctement définie sur un voisinage de a.*

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \\ h(y) \underset{y\to \ell}{\longrightarrow} \ell' \end{cases} \quad \text{alors} \quad h(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$$

Exemple : on a : $\begin{cases} \tan(x) \underset{x\to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty \\ \frac{\ln(y)}{y^2} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$, *donc* $\dfrac{\ln(\tan(x))}{\tan^2(x)} \underset{x\to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} 0.$

Définition (Limite à droite, limite à gauche)**.** *Soit a un point de I ou une de ses extrémités, et soient $\ell_d, \ell_g \in \mathbb{R}$.*

► *Lorsque f est définie sur un voisinage à droite de a, on dit que f admet ℓ_d comme limite à droite au point a si*

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \eta > 0 \ \text{ tel que } \ \forall \boldsymbol{x \in]a\ ,\ a+\eta]}\ ,\ \ |f(x) - \ell_d| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors :

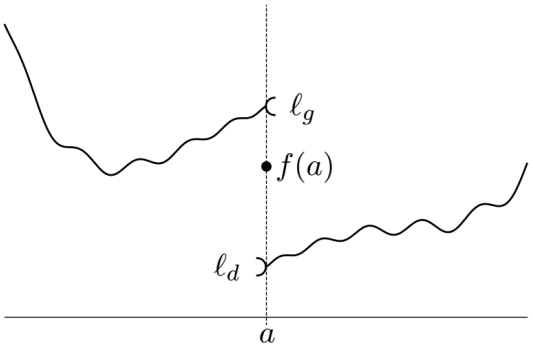
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell_d \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \ell_d \quad \text{ou} \quad \lim_{a^+} f = \ell_d \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell_d$$

► *Lorsque f est définie sur un voisinage à gauche de a, on dit que f admet ℓ_g comme limite à gauche au point a si*

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \eta > 0 \ \text{ tel que } \ \forall \boldsymbol{x \in [a-\eta\ ,\ a[}\ ,\ \ |f(x) - \ell_g| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell_g \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \ell_g \quad \text{ou} \quad \lim_{a^-} f = \ell_g \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell_g$$



Remarque. *Il n'est pas nécessaire que f soit définie en a pour définir $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$*

Propositions (Théorèmes d'existence de limites)**.** *On fixe a un point de I ou une de ses extrémités (éventuellement $\pm\infty$). Les trois théorèmes suivants permettent de démontrer qu'une fonction admet une limite en a. L'énoncé des deux premiers peuvent être aisément adaptés dans le cas d'une simple limite à gauche ou à droite. L'énoncé du troisième, donné dans le cas d'une limite à gauche, admet son symétrique dans le cas d'une limite à droite.*

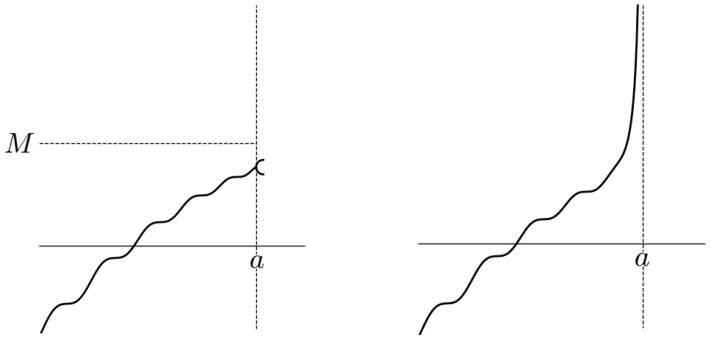
- ***Théorème des gendarmes (ou limite par encadrement) :*** *Si f vérifie sur un voisinage de a l'inégalité*
$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$
où g et h sont des fonctions qui vérifient $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

- ***Théorèmes de comparaison :***
  — *Si f vérifie sur un voisinage de a l'inégalité $|f(x)| \leqslant \varepsilon(x)$, où ε est une fonction telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.*

  — *Si f vérifie sur un voisinage de a l'inégalité $f(x) \geqslant M(x)$, où M est une fonction telle que $M(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.*

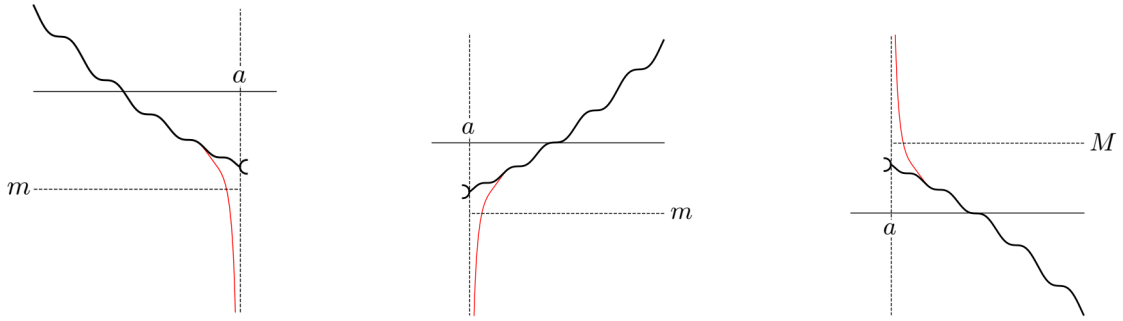
  — *Si f vérifie sur un voisinage de a l'inégalité $f(x) \leqslant m(x)$, où m est une fonction telle que $m(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.*

- ***Théorème de la limite monotone :*** *Si f est croissante sur un voisinage V à gauche de a, alors*
  — *soit elle est majorée sur ce voisinage, et dans ce cas f admet une limite finie en a^-, limite qui vaut $\sup(\{f(x) \mid x \in V\})$;*
  — *soit elle n'est pas majorée et alors $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} +\infty$.*



Remarque : si f est définie en a (et croissante sur un intervalle du type $[a-\eta, a]$), elle est automatiquement majorée à gauche de a par $f(a)$.

Symétriquement, on a des théorèmes similaires si f est décroissante, et également dans le cas d'une fonction monotone sur un voisinage à droite de a.

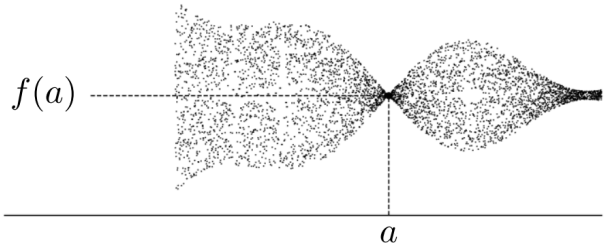


2 Continuité

2.1 Continuité en un point

Définition (Continuité de f au point a)**.** *Soit a un point de l'intervalle I. Une fonction f définie de I dans $\mathbb{R}$ est dite :*

- *continue à droite en a si $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} f(a)$;*
- *continue à gauche en a si $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a)$;*
- *continue en a si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.*



Remarques :

1. Lorsque a appartient à l'intérieur de l'intervalle I (autrement dit n'est pas une extrémité de I), la continuité simple équivaut à la continuité à droite et à gauche.
2. En utilisant les opérations sur les limites, il est clair que si f et g sont deux fonctions continues en $a \in I$, les fonctions $(f+g)$, $(\lambda \times f)$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$), $(f \times g)$, $|f|$ et $\dfrac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a.
3. Soient f et h sont deux fonctions telles que leur composée $h \circ f$ soit correctement définie sur un voisinage de a. Par composition des limites :

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ continue en } a \\ h \text{ continue en } f(a) \end{cases} \quad \text{alors} \quad h \circ f \text{ continue en } a$$

2.2 Continuité sur un intervalle

Définition (Continuité de f sur I)**.** *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I si elle est continue en tout point de I. Autrement dit, si pour tout $a \in I$, f est continue en a.*

Notation. *L'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.*

Propriétés (Opérations sur les fonctions continues)**.**

- *Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, les fonctions $(f+g)$, $(\lambda \times f)$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$), $(f \times g)$ et $|f|$ sont continues sur I.*
  De plus, si g ne s'annule jamais, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
- *La composée de deux fonctions continues est continue. Autrement dit, si $f : I \to \mathbb{R}$ et $h : J \to \mathbb{R}$ où I et J sont deux intervalles tels que $f(I) \subset J$, alors*

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ h \text{ continue sur } J \end{cases} \implies h \circ f \text{ continue sur } I$$

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $a, b \in I$ tels que $a < b$. Pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

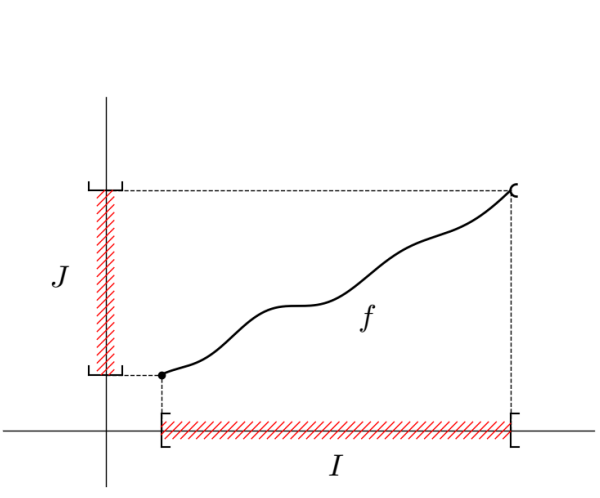
(Démonstration page 9)

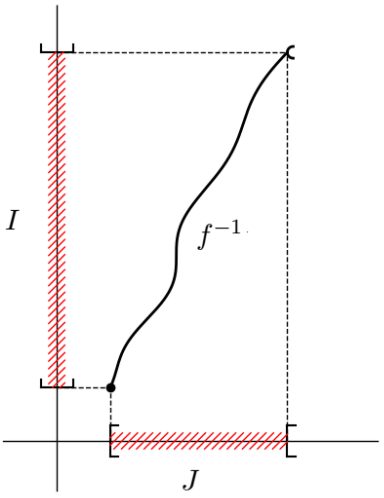
Corollaire. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*
Autrement dit, si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, alors l'ensemble $J := f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ des valeurs prises par f sur I est un intervalle.

(Démonstration page 10)

Théorème (Théorème de la bijection monotone, ou théorème de la bijection)**.**
Soit f une application continue et strictement croissante (resp. strict. décroissante) sur l'intervalle I. Alors :

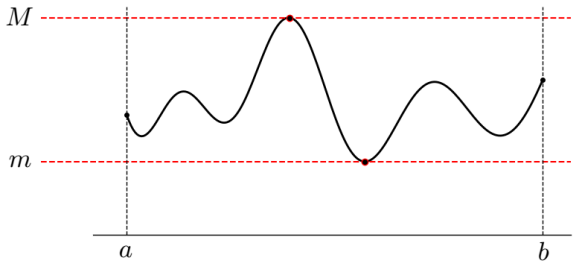
1. *L'ensemble image $J := f(I)$ est un intervalle dont les bornes (fermées ou ouvertes) s'obtiennent en regardant le comportement de f aux bords de I (valeurs, ou limites), et $f : I \to J$ est une bijection ;*
2. *la réciproque $f^{-1} : J \to I$ est également continue et strictement croissante (resp. strict. décroissante).*





(Démonstration page 11)

Théorème (Théorème des bornes atteintes)**.** *Soit $a < b$ deux réels et f une fonction (réelle) continue sur le* ***segment*** *$[a, b]$ (un segment est un intervalle fermé). Alors f est* ***bornée*** *et atteint ses bornes (borne sup et borne inf).*



(Démonstration page 12)

Remarque : Attention ce théorème est faux lorsque l'intervalle $[a, b]$ n'est pas fermé ! On peut par exemple s'en convaincre en considérant $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ (qui est continue mais pas bornée).

Corollaire. *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

Ce corollaire est la conséquence directe de deux théorèmes. Tout d'abord, un segment $[a, b]$ est en particulier un intervalle, donc on sait déjà que son image $f([a, b])$ par une fonction continue f est un intervalle (notons-le J). De plus, par le théorème des bornes atteintes, cet intervalle J est borné (puisque f est bornée), et ses bords appartiennent bien à J puisqu'ils sont atteints par f. J est donc du type $[m, M]$, et c'est donc un segment.

Démonstrations de cours sur le sujet des limites des fonctions et de la continuité

Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Théorème. *Soit f définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a l'équivalence suivante :*

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell\Big) \iff \left(\begin{array}{c} \textit{Pour toute suite réelle } u \textit{ telle que } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a, \\ \textit{on a } f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right)$$

dem :

- Commençons par montrer l'implication :

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell\Big) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Pour toute suite réelle } u \text{ telle que } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a, \\ \text{on a } f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right)$$

  Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, et considérons une suite réelle u telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Montrons que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  Fixons V_ℓ un voisinage de ℓ, c'est-à-dire un intervalle du type $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ si $\ell \in \mathbb{R}$, un intervalle du type $[A, +\infty[$ si $\ell = +\infty$, ou un intervalle du type $]-\infty, A]$ si $\ell = -\infty$.
  Comme $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, il existe un voisinage V_a de a tel que $\forall x \in V_a$, $f(x) \in V_\ell$. Or, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, les u_n appartiennent à V_a à partir d'un certain rang. Donc à partir de ce rang, $f(u_n) \in V_\ell$.
  Cela montre bien que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- Montrons maintenant l'implication réciproque (plus difficile) :

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell\Big) \Longleftarrow \left(\begin{array}{c} \text{Pour toute suite réelle } u \text{ telle que } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a, \\ \text{on a } f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right)$$

  Pour cela, nous allons montrer sa contraposée, c'est-à-dire l'implication :

$$\left(\begin{array}{c} f(x) \text{ ne tend pas vers } \ell \\ \text{quand } x \to a \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Il existe une suite réelle } u \text{ telle que } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a, \\ \text{et } f(u_n) \text{ ne tend pas vers } \ell \end{array}\right)$$

  Supposons donc que $f(x)$ ne tend pas vers ℓ lorsque $x \to a$. Cela signifie très exactement ceci :

  Il existe un voisinage V_ℓ de ℓ tel que
  pour tout voisinage V_a de a, ce voisinage contient un point x tel que $f(x) \notin V_\ell$

  Considérons $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de voisinages de a de plus en plus resserrés autour de a. Plus précisément :
  — si $a \in \mathbb{R}$: $V_n := [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$;
  — si $a = +\infty$: $V_n := [n, +\infty[$;
  — si $a = -\infty$: $V_n :=]-\infty, -n]$.
  D'après la phrase en italique, chacun de ces voisinages contient un point x tel que $f(x) \notin V_\ell$. Ce point x dépend a priori de n. Notons-le : u_n.
  Cela définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a (puisque par construction, $u_n \in V_n$ pour tout n) et telle que $f(u_n)$ ne tend pas vers ℓ (puisque par construction, $f(u_n) \notin V_\ell$).

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $a, b \in I$ tel que $a < b$. Pour toute valeur y comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

dem : On peut sans perdre de généralité supposer que $f(a) \leqslant f(b)$. En effet, si ce n'est pas le cas, il suffit de considérer la fonction $-f$ plutôt que f, ce qui ne change rien au problème.

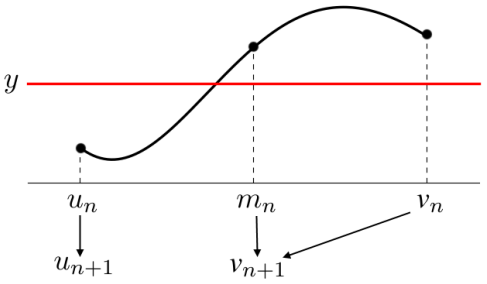
On suppose donc que $f(a) \leqslant f(b)$, et on fixe $y \in [f(a), f(b)]$.

On va maintenant procéder par dichotomie, en définissant deux suites u et v par récurrence, de la façon suivante.

- On pose : $\begin{cases} u_0 := a \\ v_0 := b \end{cases}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que les nombres u_n et v_n ont été déjà définis. La définition de u_{n+1} et v_{n+1} dépend de la valeur de f en la valeur $m_n := \frac{u_n+v_n}{2}$ (le milieu de u_n et v_n) :

  — Si $f(m_n) \geqslant y$, alors on pose : $\begin{cases} u_{n+1} := u_n \\ v_{n+1} := m_n \end{cases}$
  C'est le cas sur le schéma ci-contre.

  — Si $f(m_n) < y$, alors on pose : $\begin{cases} u_{n+1} := m_n \\ v_{n+1} := v_n \end{cases}$



Cette construction définit bien les deux suites u et v. D'autre part, par leur construction même, ces deux suites vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$ les propositions $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ suivantes :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ v_n - u_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad\qquad \mathcal{Q}(n) \ : \ f(u_n) \leqslant y \leqslant f(v_n)$$

En effet, ces deux propositions sont initialement vérifiées pour $n = 0$, et sont héréditaires (quelle que soit la valeur de $f(m_n)$, la distance entre u_n et v_n est toujours divisée par 2, et la disjonction de cas assure bien dans les deux cas que $f(u_{n+1}) \leqslant y \leqslant f(v_{n+1})$).

D'autre part, u est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, selon les cas, $u_{n+1} = m_n$ ou $u_{n+1} = u_n$, et dans les deux cas, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$. De façon symétrique, v est décroissante. Comme de plus $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (que l'on sait grâce aux phrases $\mathcal{P}(n)$), les suites u et v sont adjacentes. Par théorème, elles convergent donc vers une limite commune ℓ.

On va maintenant démontrer que $f(\ell) = y$.
Tout d'abord, ℓ appartient bien à l'intervalle $[a, b]$, car par exemple, $a \leqslant u_n \leqslant b$, donc par passage à la limite, $a \leqslant \ell \leqslant b$. La fonction f est donc bien définie et continue en ℓ. Donc par continuité, on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ et $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. *NB : c'est à cet endroit, et uniquement à cet endroit, qu'on utilise que f est continue.*
Le passage à la limite $n \to +\infty$ dans $\mathcal{Q}(n)$ donne donc :

$$f(\ell) \leqslant y \leqslant f(\ell)$$

D'où $\boxed{f(\ell) = y}$.

Conséquence : image d'un intervalle par une fonction continue

Corollaire. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*
Autrement dit, si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, alors l'ensemble $J := f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ des valeurs prises par f sur I est un intervalle.

dem : Considérons une fonction f continue sur un intervalle I, et notons $J = f(I)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de dire la chose suivante :

$$\textit{Pour tout } A, B \in J, \textit{ le segment } [A, B] \textit{ est entièrement inclus dans } J. \qquad (*)$$

En effet, pour tous $A, B \in J$, par définition de J, il existe $a, b \in I$ tels que $A = f(a)$ et $B = f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors que **tous** les réels $y \in [f(a), f(b)]$ admettent un antécédent par f dans I. Cela signifie précisément que $[A, B] \subset J$.

Cette propriété $(*)$ signifie moralement que l'ensemble J est une partie de $\mathbb{R}$ qui "ne contient pas de trou". Il reste maintenant à montrer que les seules parties de $\mathbb{R}$ qui la vérifient sont les intervalles, c'est-à-dire les ensembles du type :

$$[m, M] \ , \ [m, M[\ , \ ]m, M] \text{ ou }]m, M[\qquad \text{où } m, M \in \mathbb{R} \text{ (éventuellement } m = -\infty \text{ ou } M = +\infty)$$

Montrons-le, c'est-à-dire montrons que J est un ensemble de ce type. Posons pour cela :

$$m := \inf(J) \qquad \text{et} \qquad M := \sup(J)$$

Ces deux quantités sont bien définies, quitte à ce que m vaille éventuellement $-\infty$ et/ou $M = +\infty$. (J est bien non vide, car I est non vide)
A ce stade, on a par définition : $\boxed{J \subset [m, M]}$. C'est l'inclusion inverse qui pose question. Les bords m et M peuvent appartenir ou ne pas appartenir à J. Cela n'a pas d'importance. En revanche, on va montrer que $]m, M[\subset J$.

Fixons $y \in]m, M[$. Montrons que $y \in J$. Comme $m = \inf(J)$, l'ensemble J contient des éléments arbitrairement proches de m. En particulier, il existe $A \in J$ tel que $m \leqslant A < y$.
Symétriquement, il existe $B \in J$ tel que $y < B \leqslant M$.
On a donc :

$$\underbrace{A}_{\in J} < y < \underbrace{B}_{\in J}$$

On applique alors la propriété $(*)$: tous les éléments de $[A, B]$ appartiennent à J, en particulier y.

On a bien démontré $\boxed{]m, M[\subset J}$.

Conclusion : les deux inclusions encadrées montrent que, selon que m et M appartiennent ou non à J, J vaut l'un de ces intervalles :

$$[m, M] \ , \ [m, M[\ , \ ]m, M] \text{ ou }]m, M[$$

et donc J est bien un intervalle.

Théorème de la bijection monotone

Théorème. *Soit f une application continue et strictement croissante (resp. strict. décroissante) sur un intervalle I. Alors :*

1. *$J := f(I)$ est un intervalle dont les bornes (fermées ou ouvertes) s'obtiennent en regardant le comportement de f aux bords de I (valeurs, ou limites), et $f : I \to J$ est une bijection ;*
2. *la réciproque $f^{-1} : J \to I$ est également continue et strictement croissante (resp. strict. décroissante).*

dem : Tout d'abord, on peut, sans perdre de généralité, supposer que f est strictement croissante sur I. En effet, dans le cas où elle est strictement décroissante, on peut raisonner sur la fonction $-f$, plutôt que sur f, ce qui ne change rien au problème. On considère donc une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue strictement croissante.

1. D'après le théorème précédent (l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle), l'ensemble $J := f(I)$ est un intervalle. De plus, les bords de J sont respectivement $m = \inf f(I) = \inf_{x\in I} f(x)$ et $M = \sup f(I) = \sup_{x\in I} f(x)$. Intéressons-nous par exemple à M. Deux cas sont possibles :
   - si I est un intervalle fermé à droite : $I = \ldots, b]$, alors f est définie en b, et comme f est strictement croissante, son sup sur I est $f(b)$. Ce sup est donc atteint, et J est de la forme $J = \ldots, f(b)]$;
   - si I est un intervalle ouvert à droite : $I = \ldots, b[$, alors d'après le théorème de la limite monotone, le sup de f sur I vaut $M = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. De plus, ce sup n'est pas atteint. En effet, si c'était le cas (mettons $M = f(x_0)$ pour un $x_0 < b$), alors par stricte croissance, les $x \in]x_0, b[$ vérifieraient $f(x) > f(x_0) = M$, ce qui est impossible par définition du sup.
     J est donc de la forme $J = \ldots, \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.

   De la même manière, si I est fermé à gauche ($I = [a, \ldots)$ alors J est de la forme $[f(a), \ldots$, et si I est ouvert à gauche ($I =]a, \ldots$) alors J est de la forme $]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \ldots$.
   Le tableau suivant résume donc les quatre cas possibles.

I	$[a,b]$	$[a,b[$	$]a,b]$	$]a,b[$
J	$[f(a), f(b)]$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$

   Reste maintenant à justifier que la fonction $f : I \to J$ est bijective, mais cela tombe en fait sous le sens vu la définition de J. En effet :
   - elle est surjective par définition de J. En effet, $J = f(I)$, ce qui signifie que J est justement l'ensemble des valeurs de $\mathbb{R}$ qui ont un antécédent par f dans I ;
   - elle est injective car strictement croissante.

   Cela montre donc que f réalise une bijection entre I et J.

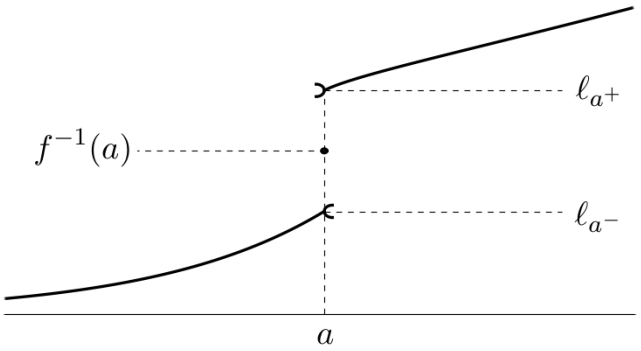
2. On définit f comme étant la bijection $I \to J$. Montrons maintenant que sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est également continue et strictement croissante.
   ▶ Montrons d'abord que f^{-1} est strictement croissante. Soit $y_1 < y_2$ deux éléments de J. Procédons par équivalences, en partant de ce que l'on veut démontrer :

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) &\iff f\big(f^{-1}(y_1)\big) < f\big(f^{-1}(y_2)\big) \quad \text{(on a appliqué } f \text{ strict. croissante)} \\ &\iff y_1 < y_2 \quad \text{ce qui est VRAI.} \end{aligned}$$

   Par remontée des équivalences, la première phrase $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ est également vraie.
   On a bien prouvé que f^{-1} est strictement croissante sur I.
   ▶ Montrons maintenant que f^{-1} est continue sur J. Fixons $a \in J$, et montrons que f^{-1} est continue en a, c'est-à-dire que $f^{-1}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f^{-1}(a)$.
   Tout d'abord, comme f^{-1} est croissante, les limites à gauche et à droite de a existent par le théorème de la limite monotone. En effet :

- à gauche de a, f^{-1} est croissante et majorée (par $f^{-1}(a)$) donc la limite $\ell_{a^-} := \lim\limits_{x\to a^-} f^{-1}(x)$ existe, et vérifie $\ell_{a^-} \leqslant f^{-1}(a)$.
- à droite de a, f^{-1} est croissante et minorée (par $f^{-1}(a)$) donc la limite $\ell_{a^+} := \lim\limits_{x\to a^+} f^{-1}(x)$ existe, et vérifie $f^{-1}(a) \leqslant \ell_{a^+}$.

On est donc dans la situation du schéma suivant :



Reste à montrer que $\ell_{a^-} = f^{-1}(a) = \ell_{a^+}$.
Procédons par l'absurde. Si par exemple $\ell_{a^-} < f^{-1}(a)$, alors tous les réels y strictement compris entre ℓ_{a^-} et $f^{-1}(a)$ n'ont pas d'antécédent par f^{-1}. Cela contredit la bijectivité de f^{-1}.
Donc $\ell_{a^-} = f^{-1}(a)$, et on prouve de même que $f^{-1}(a) = \ell_{a^+}$.
Conclusion : f^{-1} est continue en a, et comme ce raisonnement vaut pour tout $a \in J$, f^{-1} est continue sur J.

Théorème des bornes atteintes

Théorème (Théorème des bornes atteintes)**.** *Soit $a \leqslant b$ deux réels et f une fonction (réelle) continue sur le* ***segment*** *$[a, b]$. Alors f est* ***bornée*** *et atteint ses bornes.*

NB : la démonstration de ce théorème est officiellement hors programme en PCSI. En effet, elle repose sur un théorème qui n'est vu qu'en MPSI : le théorème de Bolzano-Weierstrass. Ce théorème affirme qu'une suite bornée admet toujours une suite extraite convergente (prouvé à la fin de ce document). La démonstration ci-dessous admet donc ce théorème pour démontrer le théorème des bornes atteintes.

dem : Considérons donc une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
Montrons que f est majorée, et atteint sa borne supérieure. Pour cela, on commence par définir $M \in \overline{\mathbb{R}}$ par :

$$M := \begin{cases} \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{si } f \text{ n'est pas majorée} \end{cases}$$

NB : le second cas ne peut pas être exclu a priori, mais nous allons montrer qu'il est impossible.
Dans les deux cas, il existe une suite d'éléments de l'ensemble $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ qui tend vers M. Autrement dit, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ telle que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

On applique alors le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite u (qui est bien bornée) : il existe une suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge (mettons vers $\ell \in \mathbb{R}$). Cette limite ℓ appartient bien à $[a, b]$, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a \leqslant v_n \leqslant b$, donc par passage à la limite : $a \leqslant \ell \leqslant b$.

On a alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et de plus, f est définie et surtout continue en ℓ, puisque $\ell \in [a, b]$.
Donc $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Par ailleurs, $f(v_n)$ tend aussi vers M, puisque la suite $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc par unicité de la limite, $M = f(\ell)$.

Cela prouve à la fois que M est bien une valeur finie (puisque $f(\ell) \in \mathbb{R}$), ce qui signifie que f est majorée, et que M est une valeur atteinte par la fonction f (atteinte en ℓ).

De façon symétrique, on prouve que f est minorée et atteint sa borne inférieure, soit en adaptant la démonstration précédente, soit en appliquant cette démonstration à la fonction $-f$, dont la borne supérieure est l'opposée de la borne inférieure de f.

Pour les curieux : le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass, hors programme)**.**
Une suite bornée admet toujours une suite extraite convergente.

dem : Soit u une suite bornée. Il existe donc un minorant (notons-le a_0) et un majorant (notons-le b_0) à cette suite. On va maintenant procéder par dichotomie.

Notons $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ le milieu de a_0 et b_0. Le segment $[a_0, b_0]$ contient tous les termes de la suite u, donc au moins l'un des deux segments $[a_0, m_0]$ ou $[m_0, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite u. On pose alors les nombres a_1 et b_1 de la façon suivante :

- si $[a_0, m_0]$ contient une infinité de termes de u, on note $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$;
- sinon, on note $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$.

De cette façon, le segment $[a_1, b_1]$ est un segment deux fois plus petit que $[a_0, b_0]$, et contient une infinité de termes de u.

On recommence, en posant $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ et en remarquant que comme le segment $[a_1, b_1]$ contient une infinité de termes, l'un des segments $[a_1, m_1]$ ou $[m_1, b_1]$ contient une infinité de termes de u.

- Si $[a_1, m_1]$ contient une infinité de termes de u, on note $a_2 = a_1$ et $b_2 = m_1$;
- sinon, on note $a_2 = m_1$ et $b_2 = b_1$,

de sorte que le segment $[a_2, b_2]$ est deux fois plus petit que $[a_1, b_1]$, mais contient toujours une infinité de termes de u.

On construit ainsi par récurrence une suite de segments $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ emboîtés les uns dans les autres, et ayant tous la particularité de contenir une infinité de termes de u. De plus, les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définies sont adjacentes, car les a_n sont croissants, les b_n décroissants, et $|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par théorème, ces deux suites convergent vers une même limite (que l'on note ℓ).

Reste à mettre en évidence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On la construit par récurrence de façon que chaque terme $u_{\varphi(n)}$ appartienne au segment $[a_n, b_n]$.

- Le segment $[a_0, b_0]$ contient u_0, donc on peut poser $\varphi(0) := 0$.
- Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que les entiers $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)$ ont été définis. Le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de u, donc en particulier, il contient des termes u_k pour des indices $k > \varphi(n)$. On peut donc définir $\varphi(n+1)$ comme étant n'importe lequel d'entre eux, par exemple le plus petit.

Ce mécanisme définit bien une suite d'entiers $\big(\varphi(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

Par théorème des gendarmes, $u_{\varphi(n)}$ tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$.